TEORÍA DE LA MEDIDA

Teoría general de la medida

Desarrollo histórico

La teoría de la medida y de la integración desarrollada por Lebesgue en su tesis doctoral causó un gran impacto, e inmediatamente después de su publicación, el mismo Lebesgue y otros investigadores comenzaron a utilizarla en diferentes áreas, al mismo tiempo que se daban nuevos resultados, ampliando la teoría, y se generalizaban los conceptos definidos por Lebesgue.

En 1905 Giuseppe Vitali demostró que no es posible asignar una medida a todo conjunto acotado de números reales de tal manera que se satisfagan las condiciones que pedía Lebesgue. Este resultado planteaba una disyuntiva, o bien se aceptan como razonables las condiciones de Lebesgue y entonces se restringe la familia de conjuntos a los cuales se les puede asignar una medida, o bien se buscan condiciones menos restrictivas para la medida de tal manera que pueda definirse para cualquier conjunto acotado de números reales. Se realizaron varios estudios al respecto, pero finalmente el medio matemático optó por mantener las condiciones de Lebesgue, aunque modificadas de tal manera que se pudiera eliminar la invarianza bajo traslaciones. Una cosa interesante del resultado de Vitali es que para demostrar la existencia de conjuntos que no son Lebesgue medibles, utiliza el axioma de elección. Sin la utilización de este axioma y sin agregar algún otro postulado a los axiomas de la matemática, no es posible demostrar la existencia de subconjuntos de números reales que no sean Lebesgue medibles, aunque tampoco es posible demostrar que todos los subconjuntos de números reales lo son.

Después de que Lebesgue desarrolló su teoría de integración en $\mathbb{R}$, se extendió al caso de $\mathbb{R}^n$ sin mucha dificultad. Ya en su libro de 1904, Lebesgue había esbozado el caso de $\mathbb{R}^2$ y en 1910 desarrolló el caso general multidimensional.

En 1913, Johann Karl August Radon mostró que se puede desarrollar una teoría general en la cual quedan incluidas la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y la integral de Stieltjes. Fue a partir de este trabajo que Fréchet logró desarrollar una formulación aún más general, de la cual surgiría la teoría general de la medida.

Radon introdujo el concepto de funcional aditiva sobre una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, la cual forma lo que ahora se conoce como $\sigma-$álgebra y por funcional aditiva entendía lo que ahora se conoce como $\sigma-$aditiva.Aún no se trataba de la definición general de una medida ya que se restringió a familias de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que contienen a los conjuntos borelianos.

Con base en el trabajo de Radon, Maurice René Fréchet extendió la teoría de la medida de Lebesgue a espacios abstractos en un artículo de 1915 titulado *Sur l'integrale d'une fonctionnelle ètendue a un ensemble abstrait.* Comenzó este artículo diciendo:

"M. J. Radon publicó recientemente (1913) una definición de la integral $\int F(P)\, dh(P)$ de una función $F(P)$ de un punto P del espacio de n dimensiones con respecto a una función de P, $h(P)$, de variación acotada. Esta definición resulta de una especie de fusiòn de la integral de Lebesgue y de la integral de Stieltjes. La definición de M. J. Radon se reduce a la de M. Lebesgue cuando h es una función lineal y a la de Stieltjes cuando F es una función continua. Por cierto, la integral de Radon puede tambièn escribirse:

$$\int_E F(P)\, df(e),$$

donde $f(e)$ es una función aditiva del subconjunto variable e de E.

Pero es bajo esta forma lo que me parece ser la gran ventaja de la definición de M. J. Radon, ventaja que no parece que él haya notado. M. J. Radon tenía como meta realizar un progreso en la teoría de funciones, unificando las definiciones de Stieltjes y de M. Lebesgue. Pero, de hecho, se nota que, con algunas ligeras modificaciones, la definición y las propiedades de la integral de M. Radon se extienden mucho más allá del Cálculo Integral clásico, son casi inmediatamente aplicables al dominio infinitamente más vasto del Cálculo Funcional."

Recordemos que Fréchet es uno de los precursores del Análisis Funcional. En 1906 presentó su tesis doctoral bajo el tìtulo *Sur quelques points du calcul fonctionnelle*, donde definió el concepto de métrica para un conjunto cualquiera. En su tesis doctoral y en trabajos posteriores desarrolló la teoría de los espacios métricos y en particular los espacios de funciones donde se puede definir una métrica, por ejemplo el conjunto de las funciones de cuadrado integrable con la métrica definida por $d(f,g) = \left(\int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

En su artículo de 1915, Fréchet remarcaba que un conjunto es un conjunto abstracto cuando no conocemos la naturaleza de sus elementos o, lo que es lo mismo, cuando la naturaleza de sus elementos no interviene en los razonamientos que nos proponemos hacer sobre ese conjunto.

Fréchet definió básicamente lo que actualmente se conoce como una medida sobre una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de un conjunto cualquiera. Definió también la integral con respecto a una función aditiva utilizando el método de Darboux, el cual consiste en definir la integral superior y la integral inferior.

En su artículo de 1923, al cual le siguió uno de 1924, Fréchet desarrolló aún más su teoría iniciada en 1915, quedando así ya establecido lo esencial de lo que posteriormente se llamaría la teoría de la medida y la teoría de integración con respecto a una medida.

Previamente, en el año 1914, Constantin Carathéodory, en un artículo titulado *Über das lineare Mass von Punktmengen - eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs* (Sobre la medida lineal de los conjuntos de puntos- una generalización del concepto de longitud), estableció un método para definir una medida a partir de una medida exterior en $\mathbb{R}^n$, el cual, prácticamente sin modificación, se puede utilizar para definir una medida a partir de una medida exterior definida sobre los subconjuntos de un conjunto cualquiera.

Una medida exterior m_e es una función definida sobre todos los subconjuntos de un conjunto F, la cual satisface las siguientes propiedades:

$m_e(\emptyset) = 0$,

Si $A \subset B$, entonces $m_e(A) \leq m_e(B)$,

$m_e(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_e(A_n)$,

Teniendo una medida exterior, se dice que un conjunto $E \subset F$ es medible si, para cualquier conjunto $A \subset F$, se satisface la siguiente propiedad:

$$m_e(A) = m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c)$$

El método de Carathéodory es el que quedó como estándar para definir una medida.

Podría decirse que el ciclo de investigación alrededor de los conceptos de medida y de integral con respecto a una medida, así como de sus propiedades básicas, se cerró con el trabajo de Otton Nikodym de 1930, donde prácticamente expuso la formulación moderna de la teoría de la medida y de la teoría de la integración con respecto a una medida.

El camino seguido para llegar a esta formulación siguió fielmente la metodología de Lebesgue.